TALLER PREPARACIÓN OLIMPIADAS.
POLINOMIOS Y ECUACIONES
17-11-17

Fórmulas de Cardano-Vieta:

Dado el polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ perteneciente a $\mathbb{C}[x]$ y dadas sus raíces $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ (pertenecientes a $\mathbb{C}$, se cumplirán las siguientes ecuaciones (n ecuaciones en total):

$$x_1x_2x_3...x_n = (1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3...x_{n-1} + ... + x_2x_3...x_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}$$

$$...$$

$$x_1x_2x_3...x_j + ... + x_{n-j+1}x_{n-j+2}...x_n = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}$$

$$...$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

División de Polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ (y $\mathbb{Z}[X]$)

Teorema del Resto. Regla de Ruffini

Factorización de $x^n - y^n$ y $x^n + y^n$ (n impar)

Problemas propuestos:

1. Consideremos el siguiente producto de polinomios:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{2017})(1 - x + x^2 - ... + x^{2016} - x^{2017})$$

Demostrad que el resultado no tiene términos de exponente impar.

2. Si x_1, x_2, x_3 son las tres raíces del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$, calculad $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en función de a, b, c.

3. Sabemos que una de las raíces del polinomio de coeficientes reales $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es la suma de las otras dos. Demostrad que:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0$$

4. Calculad $a, b \in \mathbb{R}$ para que $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $x^2 + 2x + 1$.

5. *(Fase Local OME 2005, problema 1)* Sean a, b, c reales no nulos y supongamos que los polinomios $x^2 + ax + bc$ y $x^2 + bx + ac$ tienen una raíz común. Demostrad que las otras dos raíces son raíces del polinomio $x^2 + cx + ab$.

6. *(Fase Nacional OME 2002, problema 1)* Hallad todos los polinomios con coeficientes reales $P(x)$ tales que

$$P(x^2 - y^2) = P(x - y)P(x + y)$$

para todos los x, y reales.

7. *(OM Sudáfrica 2011, problema 2)* Supongamos que los números reales x, y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 1 \\ 4^x - 4^y = 5/3 \end{cases}$$

Hallad el valor de $x - y$.

8. Resolved la ecuación $x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0$.

9. Encontrad todas las soluciones reales de la ecuación:

$$\log_5(x - 5) + \log_6(x + 6) = 4$$